Ejercicios de Análisis Matemático

Integrales y sus aplicaciones

El día 9 de enero debes entregar por escrito los ejercicios 1 al 6 (inclusive). Puedes comprobar los resultados con *Mathematica* pero no olvides escribir los cálculos necesarios para obtenerlos. Un ejercicio en el que no se incluyen los cálculos no vale nada. La próxima evaluación del día 9 de enero constará de cuatro ejercicios y dos de ellos los elegiré entre los que siguen a continuación. Eso quiere decir que si haces los quince ejercicios que siguen te aseguras aprobar la próxima evaluación.

1. Calcula los límites:

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_x^{2x} \operatorname{sen}(\operatorname{sen} t)\,\mathrm{d}t}{x^2}, \qquad b)\ \lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{1-\cos x} \mathrm{e}^{\operatorname{sen} t}\,\mathrm{d}t}{x^2}, \qquad c)\ \lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_{x^2}^{x} \frac{\mathrm{e}^t - 1}{\operatorname{sen}(t^2)}\,\mathrm{d}t}{\log x}.$$

2. Calcula las integrales:

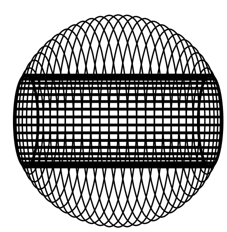
$$a)\ \int_b^{+\infty} \frac{1}{(x+a)\sqrt{x-b}}\,\mathrm{d}x \quad (a>0, b>0), \qquad b)\ \int_0^{1/4} \sqrt{2x^2+x}\,\mathrm{d}x \qquad c)\ \int_0^{+\infty} \frac{x+3}{(x+1)(x^2+8x+25)}\,\mathrm{d}x\,.$$

3. Calcula el área de las regiones del plano limitadas por las siguientes curvas.
   a) $y = 6x - 5x^2 + x^3, \quad y = -3x + 4x^2 - x^3.$
   b) $x + y^2 = 3, \quad 4x + y^2 = 4.$
   c) $x^2 - y^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = 7.$

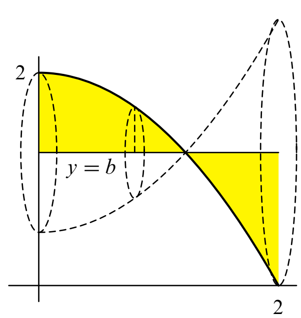
4. Calcula la longitud de la curva de ecuación $y = \log(\cos x)$ donde $0 \leqslant x \leqslant \pi/4$.

5. Calcula el volumen del sólido de revolución obtenido al girar la región limitada por la curva $y = \operatorname{sen} x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi/2)$, el eje de ordenadas y la recta $y = 1$: a) Alrededor del eje OY. b) Alrededor del eje OX.

6. a) Calcula el volumen de una esfera de radio 3 en la que, siguiendo un diámetro, se ha perforado un agujero cilíndrico de radio $r < 3$.
   b) Calcula el área de la superficie total del solido obtenido.
   c) Calcula el valor máximo absoluto de dicha área.



7. La parte de la parábola $y = 2 - \dfrac{x^2}{2}$ donde $0 \leqslant x \leqslant 2$ gira alrededor de la recta $y = b$, donde $0 \leqslant b \leqslant 2$. Calcula el volumen del sólido resultante (que será una función de b). Calcula el valor de b que hace mínimo el volumen de dicho solido.



8. De un tronco cilíndrico de radio 20 cm se corta una cuña dando dos cortes con una sierra mecánica que llegan hasta el centro del tronco. Si un corte se hace perpendicular al eje y el otro formando un ángulo de 30 grados con el primero, ¿qué volumen tendrá la cuña?

9. Sean P y Q los puntos de corte de la curva $y^2 = 2x^3$ con la circunferencia $x^2 + y^2 = 20$. Calcula la longitud de la curva $OPQO$ formada con los correspondientes trozos de las curvas anteriores, siendo O el origen de coordenadas.

10. Calcula por el método de los discos y también por el método de las láminas o capas el volumen del sólido de revolución obtenido al girar la región plana limitada por la parábola $y = x^2$, el eje de ordenadas y la recta $y = 1$ alrededor de: a) El eje OX. b) El eje OY. c) La recta $y = 3$. d) La recta $x = -1$.

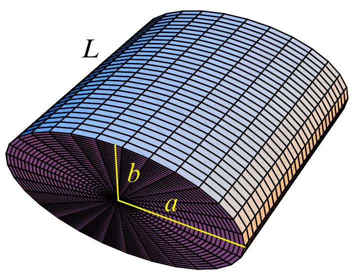
11. Sea Ω la región del primer cuadrante limitada por las curvas de ecuaciones $y = x^3$ e $y = 2x - x^2$. Calcula:

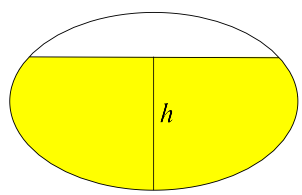
    a) El área de Ω.

    b) El volumen que se obtiene al girar Ω alrededor del eje OX.

    c) El volumen que se obtiene al girar Ω alrededor del eje OY.

12. Un depósito subterráneo de gasolina tiene forma de cilindro de sección elíptica de semiejes a y b y longitud L. Para medir su contenido se sumerge una varilla hasta la parte inferior del depósito y se mide la altura h del nivel de gasolina. Calcula el volumen de la gasolina que contiene el depósito en función de h.





13. Un sólido se genera haciendo girar la región acotada por $y = 0$ e $y = \sqrt{9 - x^2}$ alrededor del eje OY. Se perfora un orificio cilíndrico circular de radio r centrado en el eje de revolución.

    a) Calcula por el método de las láminas o capas y de los discos el volumen del sólido resultante.

    b) Calcula el área de la superficie lateral total de dicho sólido (no se considera la base). Calcula los valores de r para los que dicha área alcanza sus valores extremos.

14. Una vasija que tiene la forma del paraboloide de revolución de eje vertical obtenido al girar la parábola $y = px^2$ alrededor del eje OY, se encuentra parcialmente llena de agua. Calcula el cociente entre el área de la superficie mojada de la vasija y el volumen de agua que contiene cuando la superficie superior del agua es un círculo de radio r.

15. Calcula el área de la superficie de revolución obtenida al girar la curva $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $a > 0$, alrededor del eje OX.